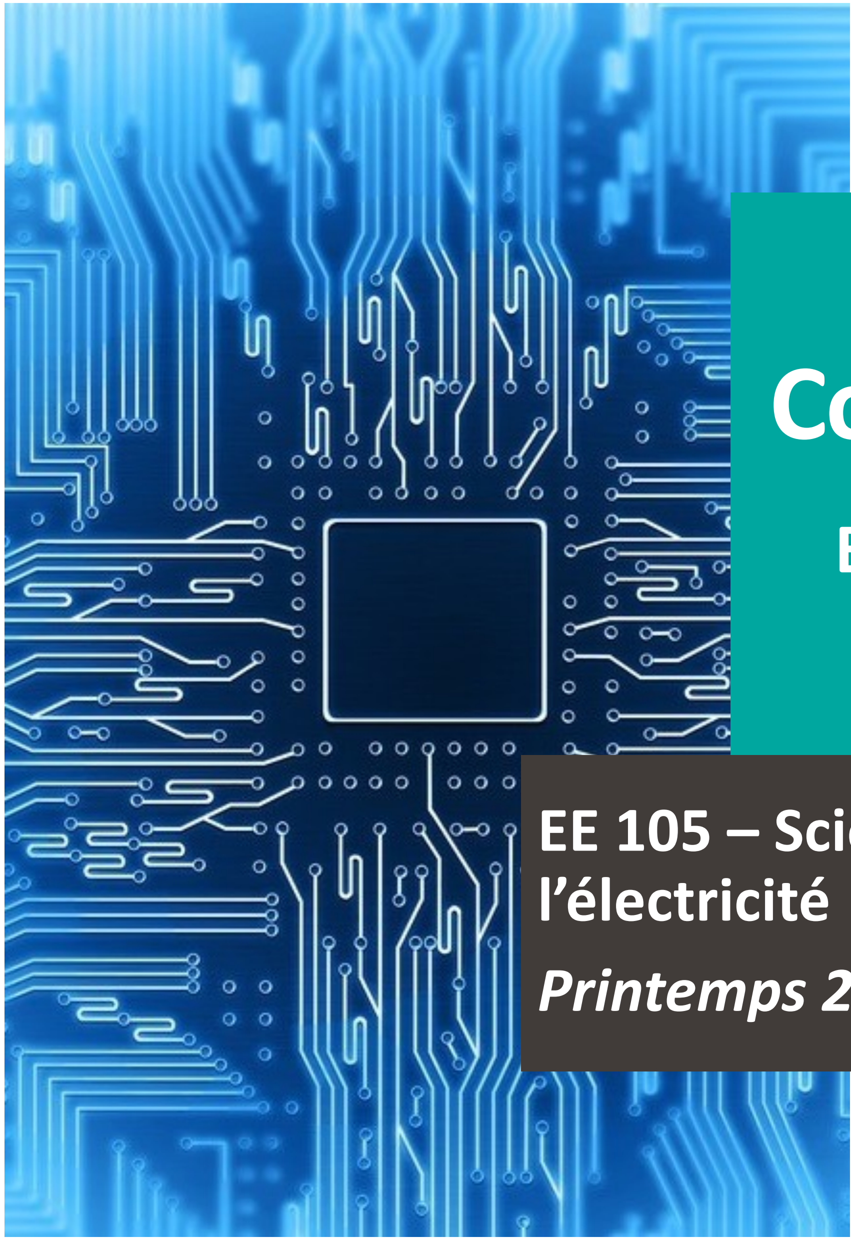
EPFL



Cours 7

Bobine et inductance

EE 105 – Sciences et Technologies de l'électricité

Printemps 2025

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Prof. Sandro Carrara- sandro.carrara@epfl.ch

Description

Aujourd'hui

- Magnétisme
- Inductance et bobine d'inductance
- Analyses des bobines
- Section 3.4
- Chapitre 13

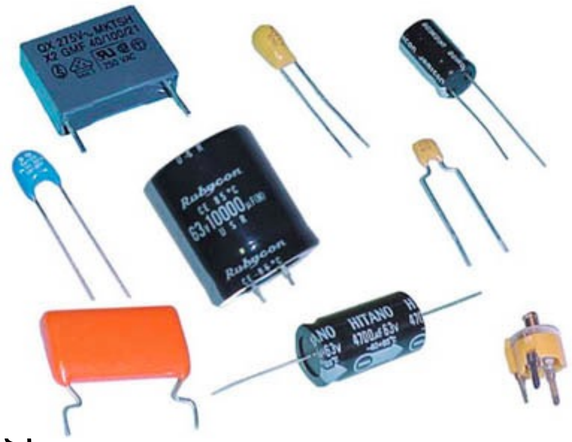
Semaine prochaine

- Circuit en régime sinusoïdal

Rappel: Le condensateur

Le condensateur est un composant électrique élémentaire

- Dipôle
- Très utilisé



Utilisé comme:

- Accumulateur d'énergie
- Mémoire
- Filtre antiparasites
- Protection dans les circuits à courant alternatif (évite les discontinuités)
- …

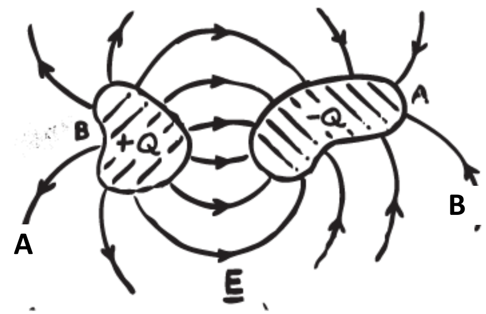
Rappel: Condensateur généralisé

Soit deux surfaces conductrices:

- de forme quelconque,
- isolées et fixes dans l'espace.

Les deux surfaces conductrices ont une charge nette Q égale et opposée.

- La séparation de charge $\pm\, Q$ est générée lorsqu'une source de tension est connectée à un tel arrangement.

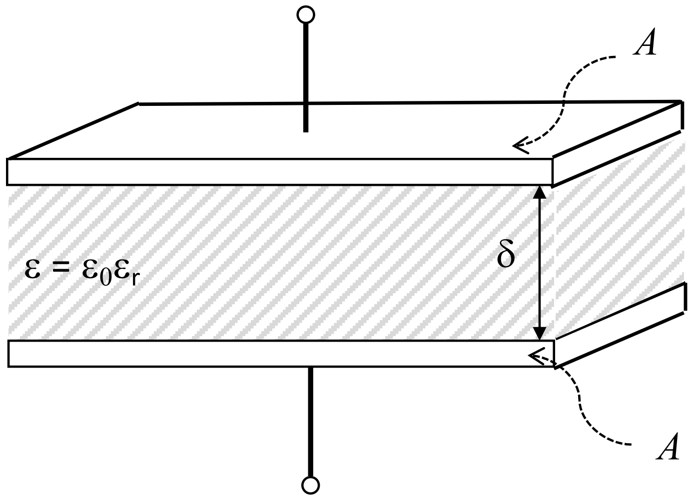


Un tel système est un condensateur

Rappel: Condensateur plan

On parle de ***condensateur plan*** lorsque les deux électrodes d'un condensateur sont deux plaques parallèles tel que:

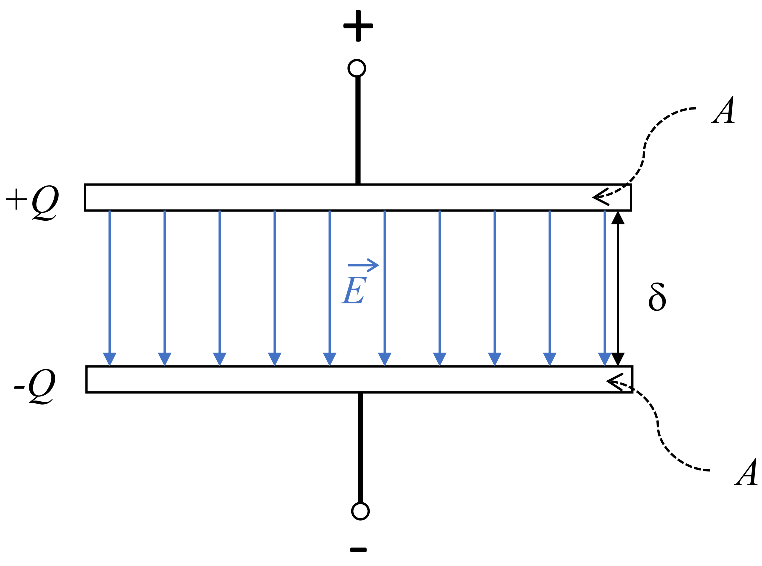
- Chaque électrode a une surface A
- Les électrodes sont séparées par une distance δ
- Entre les électrodes se trouve un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$



Rappel: Condensateur plan idéal

Lorsque les plaques sont grandes par rapport à δ ($A >> \delta$)

- Les effets de bord peuvent être négligés.
- Nous supposons donc que le champ électrique qui s'établi entre les deux plaques lorsqu'une tension y est présente est homogène.



- Par définition de Capacité

$$Q = CU_{ab}$$

- Puisque

$$Q = \varepsilon A \frac{U_{ab}}{\delta}$$

- Donc

$$C = \varepsilon \frac{A}{\delta}$$

Rappel: Energie accumulée d'un condensateur chargé

Un condensateur emmagasine une quantité d'énergie électrique égale au travail accompli pour le charger:

- Supposons à un instant donné la charge déjà accumulée soit q.
- Différence de potentiel entre les électrodes: q/C
- Travail nécessaire pour faire passer une charge infinitésimale dq de l'électrode positive à celle négative est:

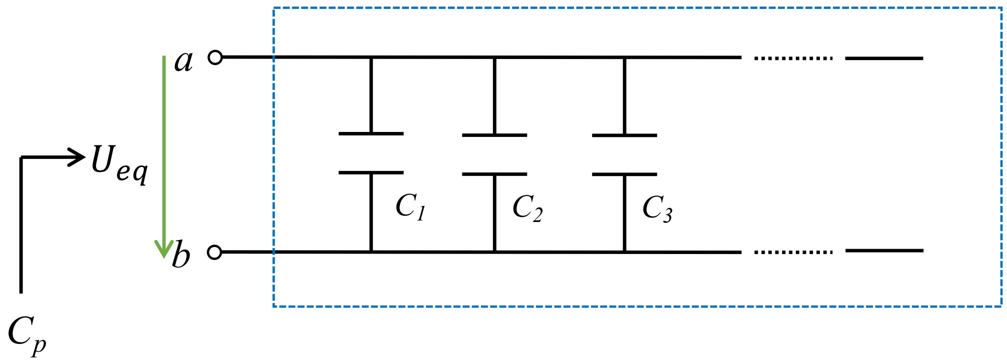
$$dW = \frac{q}{C}dq$$

- Travail total: $W_C = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\Big|_0^Q$

$$\boxed{W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

$$\boxed{W_C = \frac{1}{2}CU_{ab}^2}$$

Rappel: Condensateurs en parallèle



Toute ils ont la même tension

$$U_{eq}(t) = \frac{Q_n(t)}{C_n}$$

Mais aussi le condensateur équivalent

$$U_{eq}(t) = \frac{Q_{tot}(t)}{C_p}$$

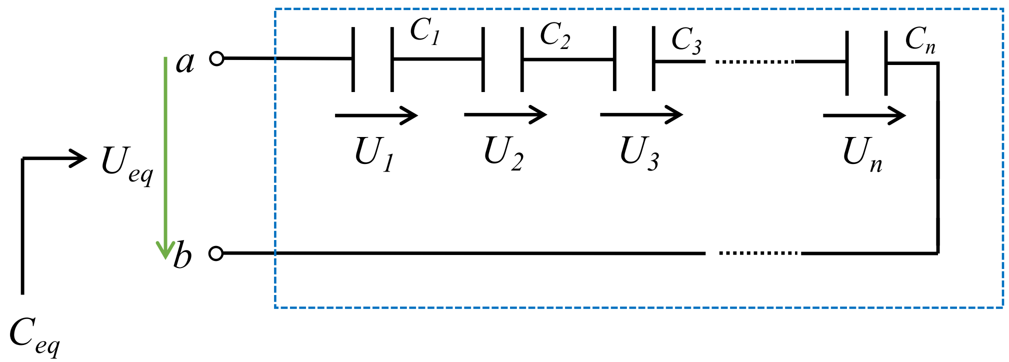
Au même temp (loi des nœuds)

$$Q_{tot}(t) = Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)$$

Et donc:

$$C_P = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

Rappel: Condensateurs en série



Au même temp (même courant, même charge)

$$Q_{tot}(t) = Q_1(t) = Q_2(t) = \ldots = Q_n(t)$$

Mais par la deuxième loi de Kirchhoff

$$U_{eq}(t) = U_1(t) + U_2(t) + \ldots + U_n(t)$$

Chaque condensateur a sa propre charge et tension

$$Q_n(t) = C_n U_n$$

Toute ils sont traversés par la même courant

$$i(t) = \frac{dQ_n(t)}{dt}$$

Mais aussi le condensateur équivalent

$$i(t) = \frac{dQ_{tot}(t)}{dt}$$

Et donc:

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}$$

Circuit RC

Condensateur est chargé: $u_c(0) = u_0$

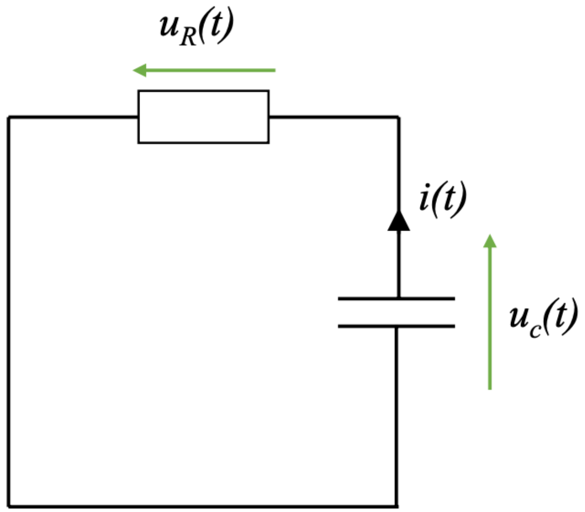
Loi des mailles:

$$u_R(t) + u_c(t) = 0$$

$$\Rightarrow Ri(t) + u_c(t) = 0$$

$$\Rightarrow RC\frac{du_c}{dt}(t) + u_c(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = 0$$



Rappel: Circuit RC

Considérons l’analyse de circuit contenant une résistance et un condensateur

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = 0$$

On généralise pour l’analyse de circuit contenant des résistances, des sources et un seul condensateur:

- Tous courants et tensions dans le circuit sont caractérisés par une équation différentielle:

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

Rappel: Solutions si $f(t)$ = A

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{a} + ke^{-at}}$$

A/a: solution lorsque t tend vers l'infini (régime d'équilibre).

$1/a$: la constante de temps τ_C du circuit

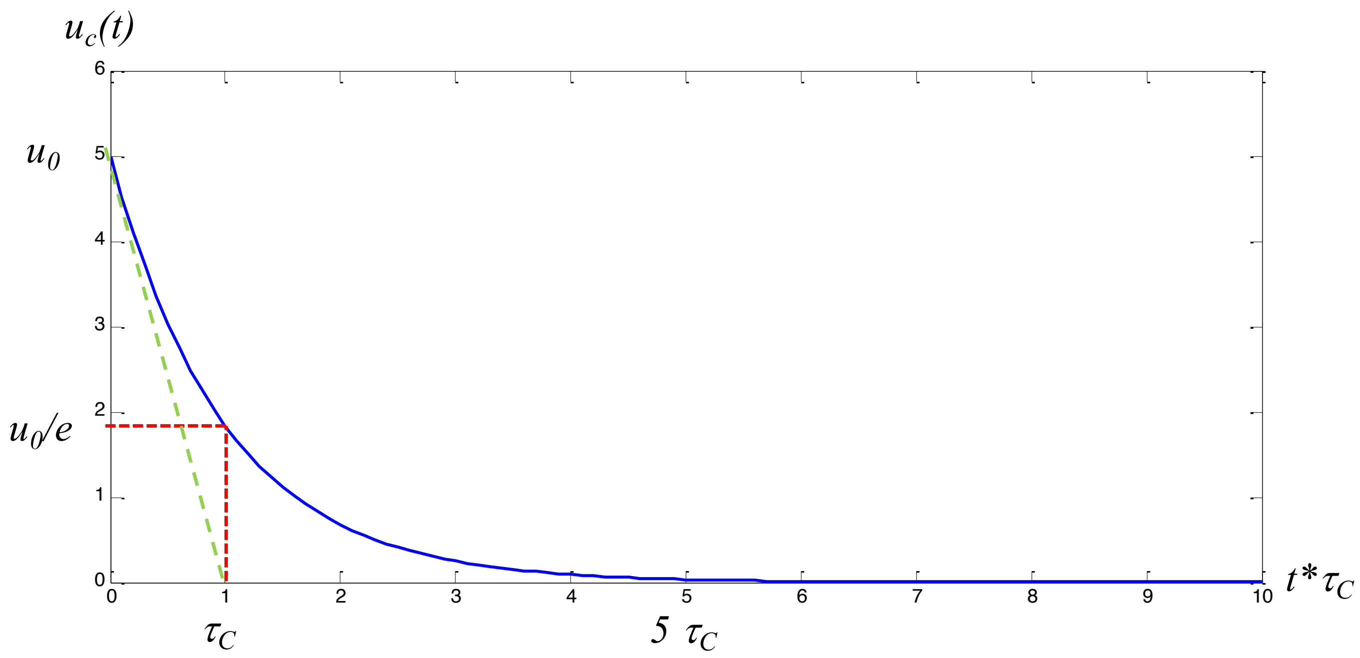
- Apres 5 τ_C on peut estimer que le circuit a atteint le régime d'équilibre.

k: constante qui peut être déterminée si l'on connait $x(t)$ a un quelconque instant

Résoudre un circuit RC: utiliser la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$ et résoudre l'équation différentielle obtenue à partir des lois de Kirchhoff

Rappel: Constante de temps

$$u_c(t) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$$



Rappel: Constante de temps

La constante de temps pour un circuit avec un seul condensateur peut être calculée en utilisant le concept de résistance équivalente

- Soit R_{eq} la résistance équivalent vue des bornes du condensateur lorsque toutes les sources du circuit sont éteintes

$$\tau_c = R_{eq}C$$

Objectifs pour aujourd'hui

Magnétisme: champ d'induction magnétique et magnétique, force électromagnétique et force de Lorentz.

Comprendre l'utilisation d'une bobine (stockage d'énergie dans un champ magnétique).

Savoir calculer l'inductance d'une bobine en fonction de ses caractéristiques géométriques et du matériau.

Savoir calculer l'énergie stockée dans une bobine chargée:

- Bobine chargée est un court-circuit. L'énergie accumulée peut être déchargée dans un circuit passif.

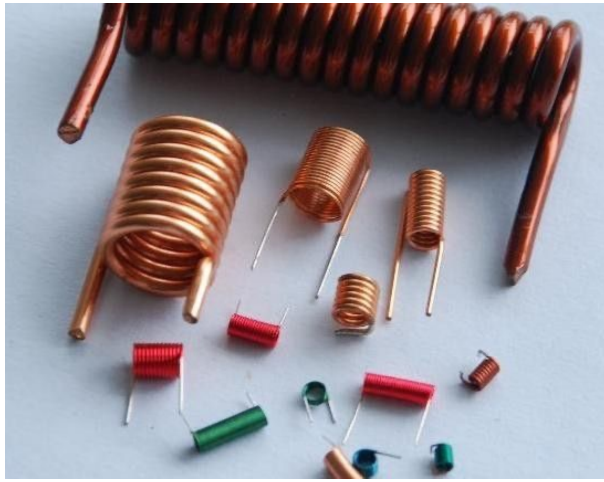
Analyser l'utilisation de bobines dans des circuits:

- Bobines en série, en parallèle
- Relation entre la tension à ses bornes et le courant qui la traverse
- Utilisation de cette relation pour calculer les tensions et courants dans un circuit RL transitoire

La bobine d'inductance

La bobine d'inductance est un composant électrique élémentaire

- Dipôle
- Très utilisé en combinaison avec d'autres composants électriques



Utilisé comme:

- Filtre d'un signal électrique
- Constituant d'un circuit résonant
- Système de régulation magnétique
- Sources d'impulsions haute tension
- …

Propriétés générales du champ magnétique

Toute charge en mouvement génère un champ magnétique:

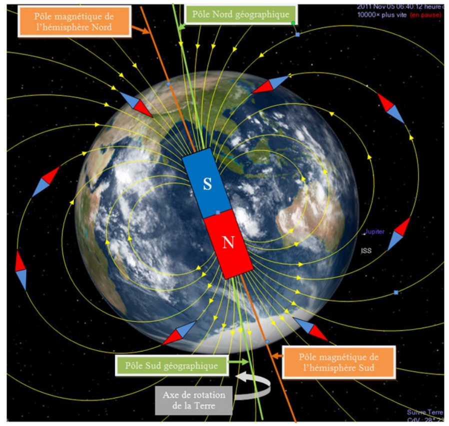
- Comme les charges correspondant au courant dans le conducteur.

L'aimant permanent:

- Champ magnétique est lié à la structure atomique du matériau.
- Mouvement des électrons: le plus petit courant existant est celui créé par un électron tournant autour de son noyau atomique.

La terre génère aussi un champ magnétique

- Mis en évidence par la boussole.



Expérience d'Ampère

L'**expérience d'Ampère** a été proposé pour pouvoir calculer l'interaction fondamentale entre deux courants électriques.

En 1820, **André-Marie Ampère** a conclu que cette force élémentaire doit satisfaire au principe newtonien de l'action et de la réaction, et donc être dirigée suivant la ligne qui joint les deux éléments de courant.

André-Marie Ampère a été un mathématicien, physicien, chimiste et philosophe français. Autodidacte, Ampère à fait d'importantes découvertes dans le domaine de l'électromagnétisme, y compris sur le solénoïde.

André-Marie Ampère (1775-1836)

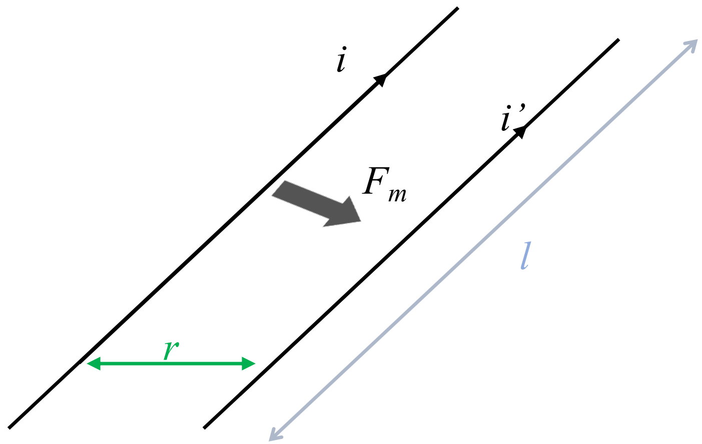
Expérience d'Ampère

Soit 2 conducteurs parallèles de longueur l, séparés par une distance r et parcourus par des courants i et i'.

On constate l'apparition de forces $\mathbf{F_m}$ d'interaction associées au mouvement des charges. Expérimentalement on obtient *la valeur* de la force:

$$|\mathbf{F}_m| = F_m = \frac{\mu}{2\pi}\frac{ii'l}{r}$$

F_m : force électromagnétique



Perméabilité: $\mu = \mu_0\mu_r$ en H/m

- μ_0: perméabilité du vide ($4\pi\ 10^{-7}$ H/m); μ_r : perméabilité relative du milieu

Champ d'induction magnétique

Par analogie au champ électrique associé à une charge:

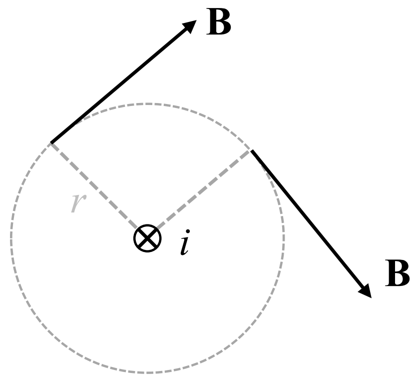
- Nous définissons un champ caractéristique de l'intéraction d'un courant i avec un autre courant i' dans un conducteur de longueur l.
- Le champ dû à i à une distance r est dit champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$
- Sa valeur est donnée par:

$$|\mathbf{B}| = B = \frac{F_m}{i'l} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{i}{r}$$

Unité: le tesla (T)

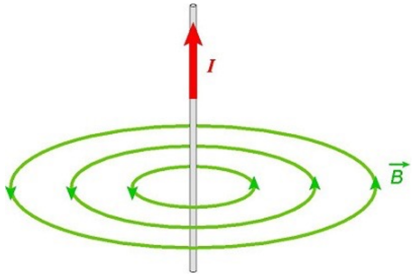
On constate que la direction des lignes d'induction est circulaire, relative au conducteur qui les génère

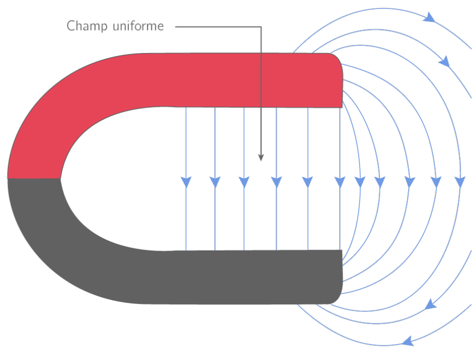
- Sens défini par la loi du tire-bouchon

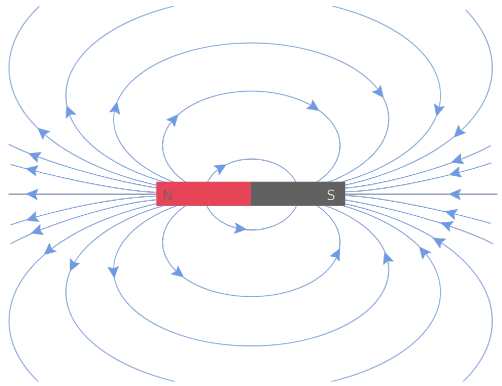


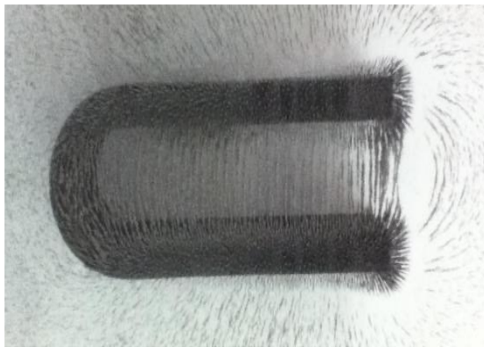
Lignes de champ magnétique

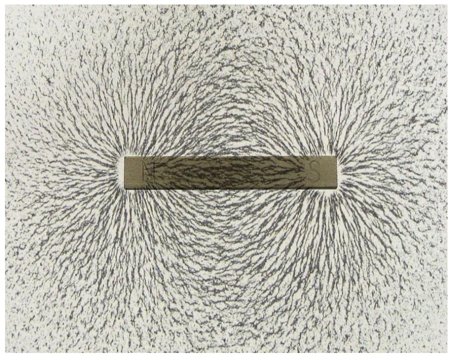
Les lignes de champ du champ magnétique sont l'ensemble des courbes en tout point tangentes à $\mathbf{B}$.







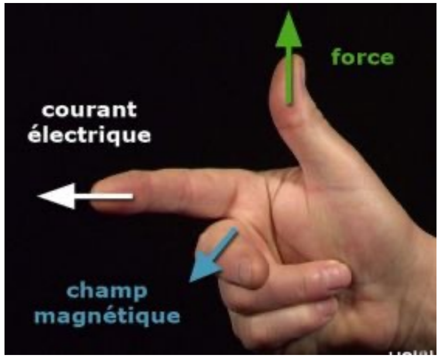




Forme vectorielle, force de Lorentz

Propriétés de l’induction conduisent à la relation suivante:

$$\mathbf{F}_m = i'\mathbf{l}\times\mathbf{B}$$



Or nous savons que

$$Q' = i't$$

Nous obtenons :

$$\mathbf{F}_m = Q'\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

La force totale, appelé force de Lorentz est donc:

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

$$\mathbf{F}_t = Q'(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

Champ magnétique

Le champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$ est une fonction du milieu à partir du champ magnétique $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Ou le vecteur champ magnétique $\mathbf{H}$ est proportionnel au vecteur induction mais indépendant du milieu:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

Unité: A/m

Flux d’induction ϕ

Lorsqu'un champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$ (en tesla) traverse une surface S (en m²) , le flux d’induction magnétique ϕ est donné par:

$$\phi = \iint \mathbf{B}.\,d\mathbf{S}$$

Unité: le weber (Wb)

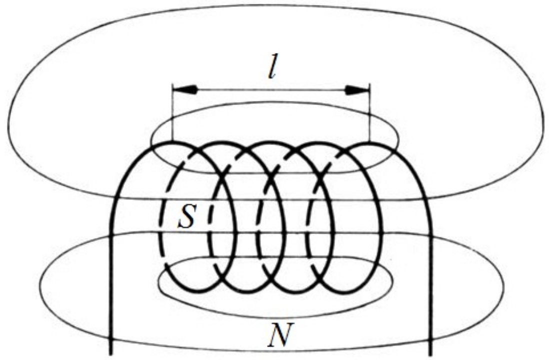
Si le champ ne dépend pas de la surface et a une incidence normale:

$$\phi = BS$$

Bobine et inductance propre

Une bobine est formée de N spires parcourues par un courant i

- La bobine a un longueur l
- La section de la bobine est S
- Le flux total traversant le bobinage est $\phi_t = N\phi$



Le flux total est proportionnel au courant associé: $\phi_t \propto i$

Par définition, le facteur de proportionnalité entre le flux total est le courant associé est l'inductance propre L d'une bobine:

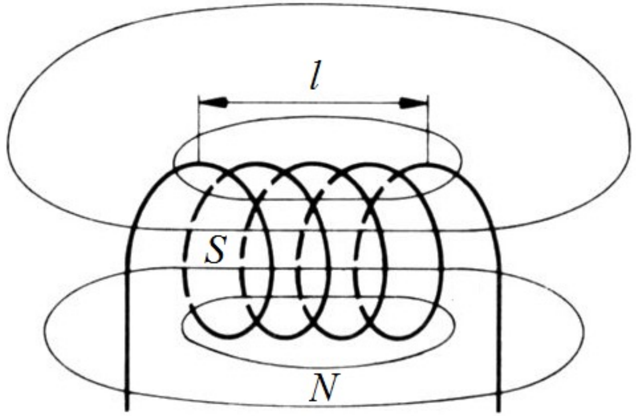
$$\phi_t = Li$$

$$L = \frac{\phi_t}{i} = \frac{N\phi}{i}$$

Inductance propre

Pour la bobine, θ= 0 (incidence normale) donc $\phi = BS$

De plus nous pouvons montrer que: $B = \frac{Ni}{l}\mu_0$



Nous obtenons donc l’inductance propre d’une bobine:

$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{NBS}{i}$$

$$\boxed{L = \frac{N^2}{l}\mu_0 S}$$

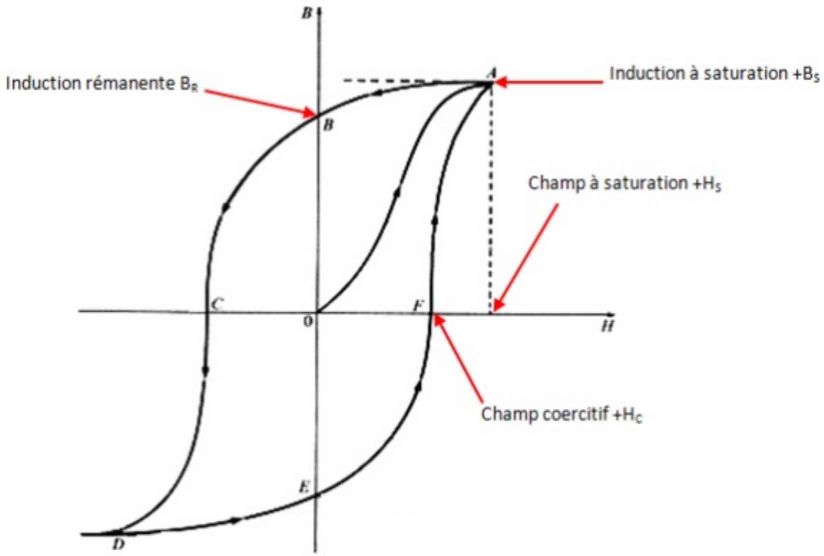
Unité: le henry (H)

Matériaux ferromagnétiques

La plupart des matériaux ont une perméabilité très proche de celle du vide (μ_0)

Seuls trois métaux présentent des perméabilités relatives (μ_r) importantes (de 100 à 10000):

- Le fer, le nickel et le cobalt (ainsi que certains de leurs alliages).
- Ces matériaux sont ferromagnétiques.
- Relation entre champ magnétique et champ d'induction magnétique présente de la saturation , de l'hystérèse



$$L = \frac{N^2}{l} \mu_{diff} S$$

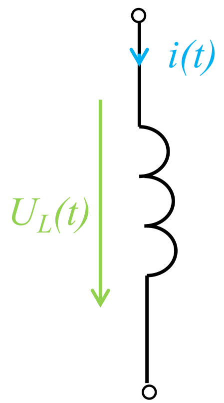
$$\mu_{diff} = \frac{dB}{dH}$$

Tension induite

La tension aux bornes d'un bobine dépend du flux total:

$$U_L(t) = \frac{d\phi_t}{dt}$$

$$\boxed{U_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}}$$



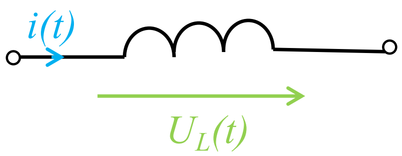
Sous forme intégrale:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{t} U_L(t')dt' \qquad i(t) = i(t_0) + \int_{t_0}^{t} U_L(t')dt'$$

Loi de Lenz

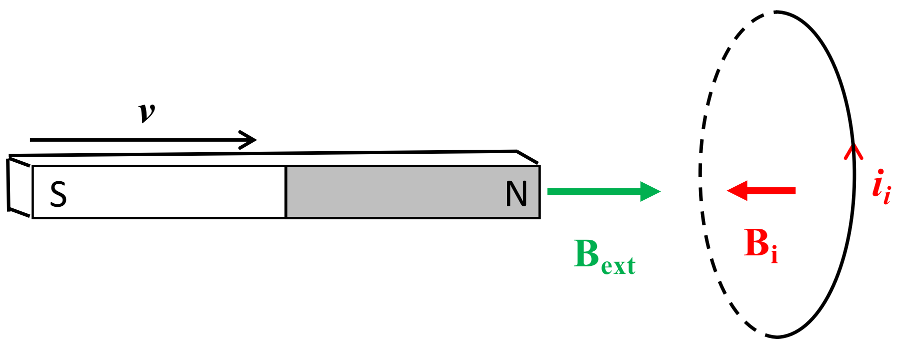
$U_L(t) = \frac{d\phi_t}{dt}$: une variation de flux magnétique produit une force électromotrice induite.

$$U_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



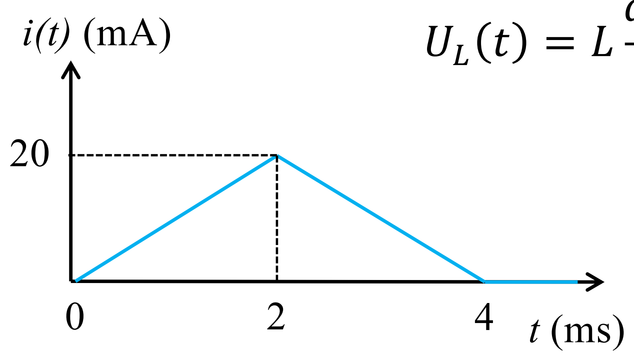
L'effet de cette force électromotrice est tel qu'elle s'oppose à la variation de flux qui la produit:

- Le courant induit (si circuit fermé) circule de manière à produire un champ magnétique induit $\mathbf{B_i}$ dont l'effet est de contrer la variation de flux du champ extérieur $\mathbf{B_{ext}}$ qui produit ce courant



Exemple (essayée vous-même):

Le courant dans une bobine de 10 mH suit la tendance donnée dans le graphe. Cherchons la tension aux bornes de la bobine



$$U_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Inductance et énergie accumulée

Une bobine peut accumuler de l'énergie

Une bobine se charge lorsqu'une tension est appliquée à ses bornes.

- L'énergie est stockée sous la forme du champ magnétique.
- Une bobine chargée: le courant a atteint la limite imposée par l'inductance L et i devient constant.
- Bobine chargée est donc une court-circuit ($U_L(t)$ = 0)

Une bobine se décharge lorsqu'elle est par exemple connectée à une résistance.

- Elle libère l'énergie accumulée.
- Elle se comporte alors une source de courant.
- Le courant dans une bobine ne présente jamais de discontinuités.

Energie accumulée

L'énergie accumulée est l'intégrale de la puissance :

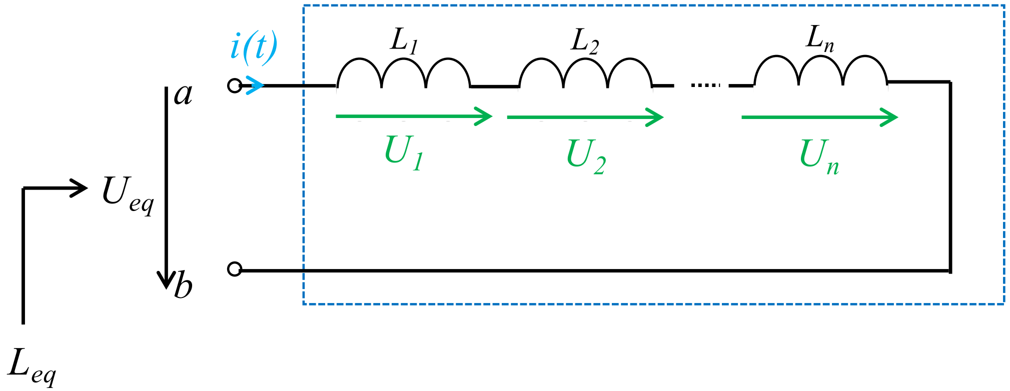
$$W_L(t) = \int_{-\infty}^{t} U_L(t')i(t')dt'$$

$$W_L(t) = L \int_{-\infty}^{t} i(t')\frac{di(t')}{dt'}dt'$$

$$W_L(t) = L \int_{-\infty}^{t} i(t')di(t')$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Bobines en série



Toute ils sont traversés par la même courant

$$U_{Ln}(t) = L_n \frac{di(t)}{dt}$$

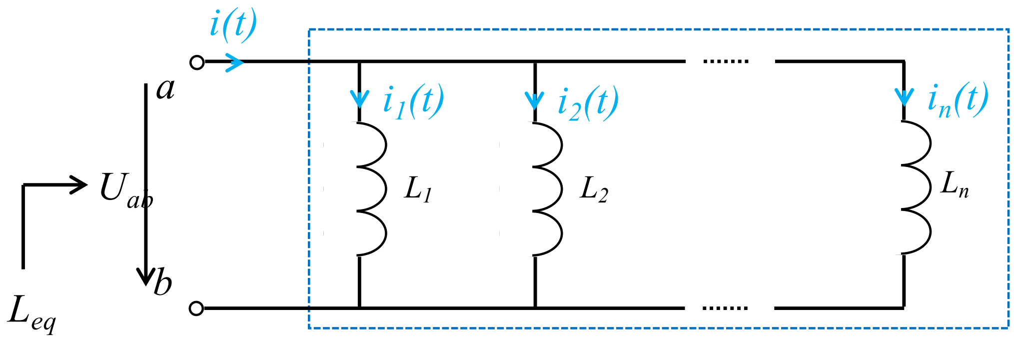
Mais aussi l'inductance équivalente

$$U_{ab}(t) = L_S \frac{di(t)}{dt}$$

Et donc:

$$L_S = \sum_{k=1}^{N} L_k$$

Bobines en parallèle



Toute ils ont la même tension

$$U_{ab}(t) = L_n \frac{di_n(t)}{dt}$$

Mais aussi l'inductance équivalente

$$U_{ab}(t) = L_S \frac{di(t)}{dt}$$

Au même temp (loi des nœuds)

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_3(t)}{dt}$$

Et donc:

$$\frac{1}{L_P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}$$

Circuit RL

Considérons l'analyse de circuit contenant des résistances, sources et une bobine

- Les circuits RL s'opposent transitoirement à l'établissement du courant dans le circuit

Puisque les bobines sont caractérisées par une équation différentielle, de même pour courants et tensions:

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

Solutions si $f(t)$ = A

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

$$x(t) = \frac{A}{a} + ke^{-at}$$

A/a: solution lorsque t tend vers l'infini (régime d'équilibre).

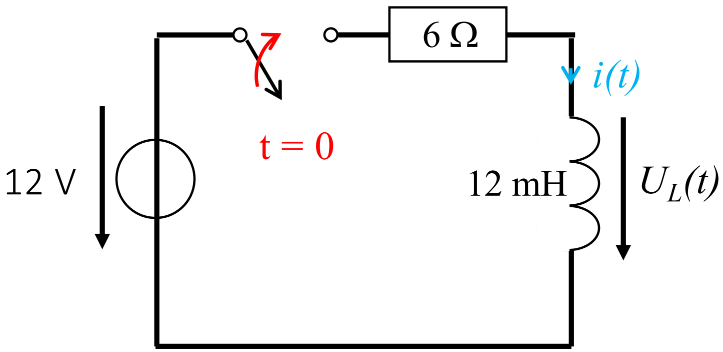
$1/a$: la constante de temps τ_C du circuit

- Apres 5 τ_C on peut estimer que le circuit a atteint le régime d'équilibre.

k: constante qui peut être déterminée si l'on connait $x(t)$ a un quelconque instant

Résoudre un circuit RL: utiliser la relation entre $i(t)$ et $U_L(t)$ et résoudre l'équation différentielle obtenue à partir des lois de Kirchhoff

Exemple 1 (essayée vous-même)



L'interrupteur est ouvert. Le circuit est en régime d'équilibre. A t = 0, nous commutons l'interrupteur et fermons le circuit.

Calculons $i(t)$ pour tout t > 0

Constante de temps

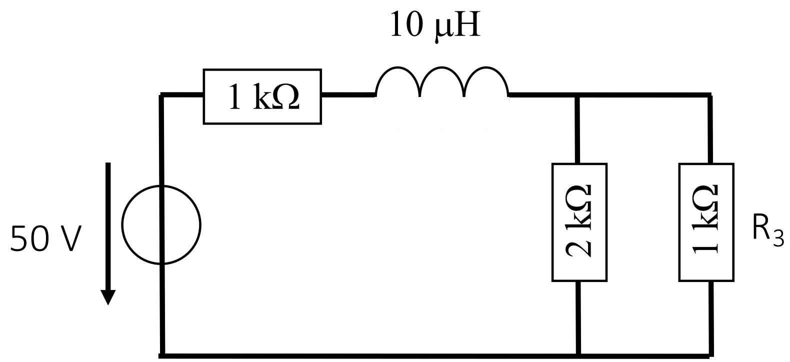
La constante de temps pour un circuit avec une seule bobine peut être calculée en utilisant le concept de résistance équivalente

- Soit R_{eq} la résistance équivalent vue des bornes de la bobine lorsque toutes les sources du circuit sont éteintes.

$$\tau_C = \frac{L}{R_{eq}}$$

Exemple 2 (essayée vous-même):

On retire soudainement la résistance R_3 du circuit. Calculez le courant qui circule dans la résistance de 2 kΩ.



Tensions et courants dans un circuit RL

Le courant traversant une bobine ne présente jamais de discontinuité.

- Ceci n'est vrai que pour le courant des bobines! Autres courant (par exemple traversant des résistances) peut être discontinues.
- Peu importe le courant ou la tension à trouver dans le circuit, toujours se baser sur $i(t)$ et la tension associée de la bobine.

En résumé

Une bobine idéale accumule de l'énergie

- Elle ne dissipe aucune énergie contrairement à une résistance
- Une bobine s'oppose temporairement à l'établissement d'un courant

$$L = \frac{\phi_t}{i} = \frac{N\phi}{i}$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Une bobine est chargée en y faisant circuler un courant

- Courant continu $\Rightarrow$ pas de variation de flux magnétique
- Une bobine est un court-circuit en condition DC (*direct current*)

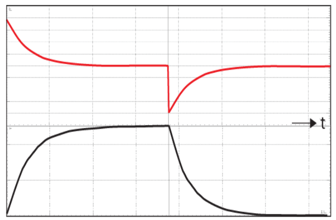
$$U_L(t) = \frac{d\phi_t}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}$$

Les bobines en série se combinent comme des résistances en série

Les bobines en parallèle se combinent comme des résistances en parallèle

Le courant aux bornes d'une bobine ne présente jamais de discontinuités.

$U_L(t)$



$i(t)$